Streszczenie rozprawy doktorskiej

Singular limits and rough behavior in evolutionary equations arising in physics and biology

złożonej przez Jakuba Skrzeczkowskiego

Praca dotyczy dwóch zagadnień z ewolucyjnych równań cząstkowych: analizy singularnych granic oraz analizy równań z niestandardowym wzrostem, gdzie wzrost zmienia się nieregularnie w czasie. Wszystkie są umotywowane zastosowaniami.

W pierwszej części pracy badamy granice osobliwe kilku równań z biologii i fizyki matematycznej. Zaczynamy od granicy *szybkiej reakcji* dla układu równań reakcji-dyfuzji z niemonotoniczną szybką reakcją, co jest umotywowane zastosowaniami w neuronauce. Po raz pierwszy dla tego typu problemu, w granicy obserwujemy szybkie oscylacje, które dokładnie analizujemy za pomocą teorii miar Younga.

Następnie badamy granicę hydrodynamiczną równania Vlasova z odpowiednio dobraną siłą tak, aby w granicy otrzymać równanie Cahna-Hilliarda, tzn. równanie czwartego rzędu stosowane w naukach o materiałach i modelowaniu nowotworów. Jest to pierwsze rygorystyczne wyprowadzenie tego równania z opisu mikroskopowego, motywowane formalnymi obliczeniami Takaty i Noguchi (*J. Stat. Phys.*, 2018).

Następnie dowodzimy zbieżności nielokalnego równania Cahna-Hilliarda do równania lokalnego. Problem ten był szeroko badany w ostatnich latach. Nasza praca jest pierwszą, która rozważa przypadek zdegenerowanej mobilności, co jest motywowane przez zastosowania do modelowania wzrostu nowotworów. Nasze wyniki mogą być postrzegane jako dokończenie programu Giacomina-Lebowitza wyprowadzenia równania Cahna-Hilliarda z układów cząstek (*J. Stat. Phys.*, 1997), którzy wyprowadzili równanie jedynie w formie nielokalnej.

Na koniec tej części omawiamy zbieżność równania Eulera-Kortewega do równania Cahna-Hilliarda w tzw. granicy wysokiego tarcia (ang. *high-friction limit*). Problem ten był badany przez Lattanzio i Tzavarasa (*Comm. PDEs*, 2017), którzy udowodnili zbieżność metodą relatywnej entropii przy założeniu, że układ graniczny ma gładkie i dodatnie rozwiązanie. Nie ma jednak teorii, która by to gwarantowała. Dlatego proponujemy badanie nielokalnego równania Eulera-Kortewega. Wówczas, układem granicznym jest nielokalne równanie Cahna-Hilliarda, który ma wymagane własności. Ponadto, używając wyniku z poprzedniego rozdziału, pokazujemy zbieżność nielokalnego równania Eulera-Kortewega do lokalnego równania Cahna-Hilliarda.

Druga część rozprawy dotyczy równań parabolicznych o niestandardowym wzroście, gdzie wzrost zmienia się nieregularnie, powiedzmy, nieciągle w czasie. Klasycznym przykładem jest równanie $p(t,x)$-Laplace'a z p ściśle oddzielonym od 1 i $+\infty$. Dowodzimy istnienia i jednoznaczności rozwiązań dla p nieciągłych po zmiennej czasowej i log-Hölderowsko ciągłych po zmiennej przestrzennej. Jest to pierwszy wynik tego typu, gdyż wszystkie dotychczasowe prace zakładały ciągłość wykładnika p. Dowód oparty jest na prostej obserwacji, że wygładzenie po zmiennej przestrzennej rozwiązania równania parabolicznego jest już regularne po zmiennej czasowej.

Następnie uzyskujemy wynik istnienia dla płynów nienewtonowskich z tensorem naprężeń, który jest nieciągły po zmiennej czasowej. Jest to problem motywowany zachowaniem płynu elektroreologicznego (złożonego z naładowanych cząstek) poruszającego się w polu elektrycznym, które drastycznie zmienia się w czasie.

Ostatni rozdział dotyczy funkcjonałów dwufazowych, czyli funkcjonałów, których wzrost zmienia się z p na q, w zależności od punktu przestrzeni. Są one dokładnie badane od czasu przełomowej pracy Mingione i Colombo (*ARMA*, 2014). Używając nowych metod aproksymacji, poprawiamy dotychczas znane zakresy wykładników p, q, że funkcje minimalizujące mogą być aproksymowane w *dobry* sposób (tzw. brak zjawiska Lavrentieva). W przypadku $p \leq d$ (d jest wymiarem przestrzeni), otrzymujemy jako pierwsi optymalny zakres takich wykładników (A. K. Balci et al, *Calc. Var. PDE*, 2020). Jest to ważne, bo jest to pierwszy krok przy dowodzeniu gładkości tych funkcji. W zastosowaniach opisują one konfiguracje kompozytów składających się z dwóch materiałów w reakcji na siłę zewnętrzną.